# משפט

אם f לא יורדת ב וf גזירה שם, אזי לכל

## הוכחה

## הערה

אם f עולה בקטע , יתכן ש עבור איזה

### דוגמה

הינה פונקציה עולה ב אבל

*אבל g אינה פונקציה עולה בשום סביבה של 0.* ***הפונקציה g' אינה רציפה בx=0!***

1. באילו נסיבות תיהה גזירה בכל ?
2. באילו נסיבות תיהה רציפה בכל ?
3. באילו נסיבות תיהה גזירה בכל ?

## פתרון

1. גבול זה קיים אך ורק אם , ואז
2. גזירה בכל אם ורק אם קיימת :

# משפט לגרז'

תהי f רציפה ב וגזירה ב, אזי קיים כך ש

## הוכחה

יישום משפט רול לפונקציה:

# משפט הערך הממוצע(גירסת קושי)

תהיינה f,g פונקציות רציפות ב, גזירות ב ונניח ש ב. אזי קיימת כך ש

## הערה

משפט לגרנז' הוא המקרה הפרטי של משפט קושי.

## הוכחה

יישם משפט רול לפונקציה  
שימו ♥: שכן אם קיימת לפי משפט רול כך ש.

F רציפה ב, גזירה ב, , לכן קיימת b כך ש

נגזרת ימנית, שמאלית וסימטרית

# דוגמה

נגזרת ימנית, שמאלית או סימטרית **לא** מלמדות על רציפות הפונקציה.

f רציפה ב. קיימות בכל ץ . אבל לא קיימת כך ש או או

הפונקציה גזירה בכל הקטע פרט לנקודה אחת – ובגלל הנקודה הזאת משפט לגרנז' לא תופס.

נסמן ב: או או או או

# משפט

תהי f רציפה ב ונניח ש קיימת לכל וש עבור . אזי f עולה ב.

## הערה

1. כמעט אותה הוכחה מראה שהמשפט נשאר נכון אם קיימת וחיובית עבור באשר S הינה קבוצה בת מנייה.
2. מספיק להוכיח ש

## הוכחה

נוכיח קודם ש. נניח שלא – אזי . קח כך ש [] נסמן . אזי שכן . יהי . לפי ההגדרות מתקיים:

1. אם אזי
2. לכל קיים x כך ש ו

טענה:

אמנם אם אזי ו עבור קטן שכן f רציפה. בניגוד ל(1)  
ואם אזי ו עבור קטן בניגוד ל(2)

נחשב את (עבור נגזרת ימנית. השאר - תרגיל):

עכשיו בואו נוכיח ש. אמנם, ע"פ מה שהוכחנו מתקיים לכל   
. אם אזי f קבועה ב ואז לכל .

נתבונן ב. פונקציה זו רציפה ב, , לכן ע"פ המשפט הקודם הינה פונקציה עולה.

# משפט

נניח שf רציפה ב וגזירה ב. אם אזי

## הערה

יש משפט דומה: אם אזי

## מסקנה

תהי f גזירה ב, אזי כל נקודת אי רציפות של תהייה מהמין השני.

### הוכחה של המסקנה

נניח ש הינה נקודת אי רציפות של . לפי המשפט אם קיים אזי . אם קיים אזי גם

## הוכחה של המשפט

ידוע לנו: . טענה:

לפי משפט לגרנז' קיים כך ש

כאשר :  
כאשר

## שאלה

למה הוכחה זו לא מוכיחה שאם קיים אזי ?